VETORES E ÁLGEBRA VETORIAL

MARCELO DIAS PASSOS

Resumo. Estas notas são revisões de notas de aulas digitadas durante os cursos de MATB34 (Geometria Analítica e Álgebra Vetorial) em 2021 (semestres 2021.1 e 2021.2).

1. Segmentos Orientados

Os segmentos orientados são os objetos geométricos que formalizam as "setas".

Definição 1. *Um **segmento orientado** é um par ordenado (A, B), onde A e B são pontos (do espaço). O ponto que aparece na primeira coordenada do segmento orientado é chamado de **origem** e aquele que aparece na segunda coordenada é chamado de **extremidade**.*

*Um segmento orientado será chamado de **nulo** quando origem e extremidade coincidirem.*

Portanto (X, Y) é segmento orientado nulo se, e somente se, $X = Y$.

Observação 1. *Para fixarmos notação, se A e B são pontos distintos, diremos que:*

*(1) $\overline{AB}$ é o **segmento de reta** de extremidades A e B, e*

*(2) $\overleftrightarrow{AB}$ é a **reta** determinada por A e B.*

Sendo assim, $\overline{AB} = \overline{BA}$ e $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA}$, enquanto $(A, B) \neq (B, A)$.

Definição 2. *Diremos que os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são **colineares** se, e somente se, existe reta r tal que $A, B, C, D \in r$.*

Da definição acima concluímos que:

Proposição 1. *Sejam A, B, C e D pontos. Então:*

(1) (A, A) e (C, C) são colineares,

(2) se $A \neq B$, então (A, B) e (C, C) são colineares se, e somente se, $C \in \overleftrightarrow{AB}$, e

(3) se $A \neq B$ e $C \neq D$, então (A, B) e (C, D) são colineares se, e somente se, $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$. □

Demonstração. (1) Se $A = C$, qualquer reta que passe por A testemunha que (A, A) e (C, C) são colineares. Se $A \neq C$, então A e C determinam a reta $\overleftrightarrow{AC}$ e daí $A, C \in \overleftrightarrow{AC}$.
(2) Suponhamos que $A \neq B$. Se (A, B) e (C, C) são colineares, podemos fixar uma reta r tal que $A, B, C \in r$. Por outro lado A e B determinam uma única reta e conclui-se que $r = \overleftrightarrow{AB}$. Portanto $C \in \overleftrightarrow{AB}$. Para provar a recíproca basta perceber que, se $C \in \overleftrightarrow{AB}$, então $A, B, C \in \overleftrightarrow{AB}$ e assim (A, B) e (C, C) são colineares.
(3) Suponhamos $A \neq B$ e $C \neq D$. Se $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$, então $A, B, C, D \in \overleftrightarrow{AB}$ e deduzimos que (A, B) e (C, D) são colineares.

Agora suponhamos que (A, B) e (C, D) sejam colineares e tomemos r, reta, que testemunha tal suposição. Como A e B pertencem a r e determinam uma única reta, concluímos que $r = \overleftrightarrow{AB}$. Mas também C e D pertencem a r e determinam uma única reta. Logo $\overleftrightarrow{CD} = r = \overleftrightarrow{AB}$. □

Definição 3. *O **comprimento de um segmento orientado** é a distância entre sua origem e sua extremidade.*

Todo segmento orientado nulo tem comprimento **zero** e estes são os únicos com esta propriedade.

Definição 4. *Sejam (A, B) e (C, D) dois segmentos não-nulos. Diremos que (A, B) tem **mesma direção** que (C, D) se, e somente se, $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$.*

Date: 2024.

Vale lembrar que as retas r e s são ditas **paralelas** se, e somente se, existe um mesmo plano que as contenha e além disso $r = s$ ou $r \cap s = \emptyset$.

Definição 5. *Sejam (A, B) e (C, D) dois segmentos não-nulos de mesma direção. Diremos que (A, B)* ***tem mesmo sentido que*** *(C, D) se, e somente se:*

(1) (A, B) e (C, D) ***não são*** *colineares e os segmentos de reta $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$* ***não se encontram;*** *ou*
(2) (A, B) e (C, D) ***são*** *colineares e a semirreta de origem em A e determinada por B está contida ou contem a semirreta de origem C e determinada por D.*

Uma vez que um segmento orientado é como formalizamos uma "seta", *segmentos orientados não-nulos de mesmo sentido* são "setas paralelas apontando para o mesmo lado"!

Definição 6. *Dois segmentos orientados não-nulos de mesma direção, que* ***não*** *têm mesmo sentido, serão ditos de* ***sentidos opostos*** *ou* ***contrários****.*

Definição 7. *Se (A, B) e (C, D) são segmentos orientados, diremos que (A, B)* ***é equipolente a*** *(C, D) se, e somente se:*

(1) $A = B$ e $C = D$, ou
(2) $A \neq B$, $C \neq D$ e (A, B) tem mesmos comprimento, direção e sentido que (C, D).

Denotaremos esta situação por " $(A, B) \sim (C, D)$ ".

É importante notar que um segmento orientado **nulo** é equipolente a somente outro segmento orientado nulo.

A comparação entre segmentos orientados definida por "$\sim$" é um exemplo do que será oportunamente chamado de **relação**. Além disso:

(1) $(A, B) \sim (A, B)$, para qualquer segmento orientado (A, B). Quando uma relação satisfaz essa condição é chamada de **relação reflexiva**;
(2) se $(A, B) \sim (C, D)$, então $(C, D) \sim (A, B)$, para quaisquer segmentos orientados (A, B) e (C, D). Nesse caso a relação é dita **relação simétrica**; e
(3) se $(A, B) \sim (C, D)$ e $(C, D) \sim (E, F)$, então $(A, B) \sim (E, F)$, para quaisquer segmentos orientados (A, B), (C, D) e (E, F). Essa condição é definição para uma **relação transitiva**.

Toda relação, que é simultaneamente reflexiva, simétrica e transitiva, é chamada de **relação de equivalência**. Os comentários do parágrafo anterior provaram que:

Proposição 2. *A relação de equipolência é relação de equivalência.* □

Proposição 3. *Sejam A, B e C, pontos. Se $(A, B) \sim (A, C)$, então $B = C$.*

Demonstração. Suponhamos que $(A, B) \sim (A, C)$.

Se $A = B$, então (A, B) é nulo. Consequentemente (A, C) também é nulo e $C = A = B$. Estudemos o caso no qual $A \neq B$. Daí (A, C) não pode ser nulo e segue que $A \neq C$. Como (A, B) tem mesma direção que (A, C), deduzimos que $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{AC}$. Mas duas retas paralelas têm ponto em comum quando, e somente quando, são coincidentes. Portanto $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$. Como a distância de A até B é a mesma que de A até C e as "setas estão apontando para o mesmo lado", deduz-se que $B = C$. □

Exercício 1. *Sejam A, B, C e D, pontos. Mostre que:*

(1) se $(A, B) \sim (C, D)$, então $(B, A) \sim (D, C)$;
(2) se $(A, B) \sim (C, B)$, então $A = C$.

Teorema 4. *Sejam A, B e C, pontos. Existe um único ponto X tal que $(A, B) \sim (C, X)$.*

Demonstração. Se $A = B$, basta tomar $X = C$. Suponhamos $A \neq B$. Existe uma única reta r tal que $r // \overleftrightarrow{AB}$ e $C \in r$. Seja x a distância de A até B. Em r existem exatamente dois pontos de r que distam x de C. Somente um deles "aponta" para o mesmo lado que (A, B) e seja X esse ponto. Logo $(A, B) \sim (C, X)$.

Se Y é tal que $(A, B) \sim (C, X)$ e $(A, B) \sim (C, Y)$, então $(C, X) \sim (C, Y)$. Pela proposição 3, $X = Y$. □

2. Vetores

Definição 8. ***O vetor determinado pelo segmento orientado*** (A, B) *é o conjunto de todos os segmentos orientados (do espaço) equipolentes a* (A, B)*. Denotaremos tal conjunto por* $\overrightarrow{AB}$*. O* ***vetor nulo*** *– denotado por* $\vec{0}$ *– é o vetor determinado por um (ou qualquer) segmento orientado nulo.*

Dado que todo vetor é um conjunto de segmentos orientados mutualmente equipolentes, é comum dizer que um vetor é uma **classe de equipolência**. Imediatamente deduzimos que $(A, B) \in \overrightarrow{AB}$ pois $\sim$ é relação reflesiva. Se X e Y são pontos, então $(X, Y) \in \overrightarrow{AB}$ se, e somente se, $(X, Y) \sim (A, B)$.

Proposição 5. *Para* A, B, C *e* D*, pontos,* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *se, e somente se,* $(A, B) \sim (C, D)$*.*

Demonstração. Suponhamos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Visto que $(A, B) \in \overrightarrow{AB}$, então $(A, B) \sim (C, D)$. Para provar a recíproca, tomemos por hipótese $(A, B) \sim (C, D)$. Para X e Y, pontos, observamos que

$$(X, Y) \sim (A, B) \quad \Leftrightarrow \quad (X, Y) \sim (C, D) \ ,$$

visto que a equipolência é relação de equivalência. Portanto os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são conjuntos idênticos pois têm os mesmos elementos. □

Corolário 1. *Sejam* A *e* B*, pontos, e* $\vec{v}$ *um vetor. Então* $(A, B) \in \vec{v}$ *se, e somente se,* $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$*.*

Demonstração. Se $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, então $(A, B) \in \vec{v}$ pois $(A, B) \sim (A, B)$. Suponhamos $(A, B) \in \vec{v}$. Dado que $\vec{v}$ é um vetor, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, para algum segmento orientado (C, D). Sendo assim, $(A, B) \sim (C, D)$ e, pela proposição anterior, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{v}$. □

Por causa do corolário anterior, cada *elemento* de um vetor *determina* ou **representa** o vetor! Por isso cada elemento de um vetor será chamado de **representante** do vetor. Sendo assim, desenharemos *representantes* de um vetor e não propriamente o vetor em si. O próximo teorema vai mostrar que um vetor admite reprensentante com origem em qualquer ponto do espaço.

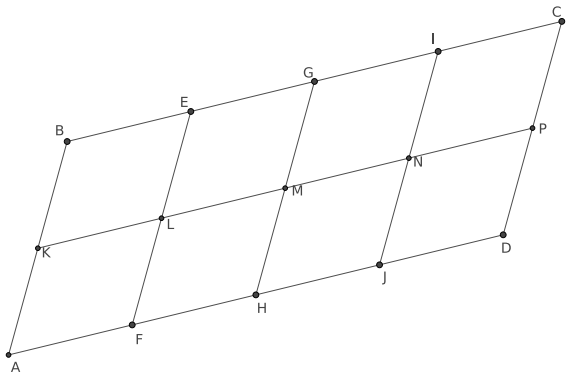
Teorema 6. *Sejam* A *um ponto e* $\vec{v}$ *um vetor. Existe um único ponto* B *tal que* $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$*.*

Demonstração. Como $\vec{v}$ é um classe de equipolência, existem C e D, pontos, tais que $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$. Pelo teorema 4, existe único ponto B tal que $(A, B) \sim (C, D)$. Sendo assim, $\vec{v} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

Suponhamos que E é ponto tal que $\overrightarrow{AE} = \vec{v}$. Logo $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}$ e $(A, E) \sim (A, B)$. Pela proposição 3, $E = B$ e concluímos a unicidade. □

Corolário 2. *Todo vetor é um conjunto infinito.*

Demonstração. Por absurdo, seja $\vec{v}$ um vetor que é um conjunto finito de segmentos orientados 2 a 2 (mutualmente) equipolentes. Seja $\mathcal{O}$ o conjunto das origens dos segmentos orientados que representam $\vec{v}$. Naturalmente $\mathcal{O}$ também é finito. Como o conjunto dos pontos do espaço é infinito, existe A que é ponto do espaço e **não** é ponto de $\mathcal{O}$. Pelo teorema anterior, existe ponto B, tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$. Neste caso, $(A, B) \in \vec{v}$ e deveríamos ter $A \in \mathcal{O}$, o que gera uma contradição. □



Exercício 2. *Dado que qualquer vetor tem* ***infinitas*** *maneiras de ser descrito ou representado, escreva os vetores a seguir de todas as maneiras possíveis, usando somente os pontos da figura ao lado. (Por exemplo,* $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{DD} = \overrightarrow{EE} = \overrightarrow{FF} = \ldots$ *e assim por diante.)*

(1) $\overrightarrow{AB}$	*(6)* $\overrightarrow{MA}$	*(11)* $\overrightarrow{EN}$
(2) $\overrightarrow{AK}$	*(7)* $\overrightarrow{NC}$	*(12)* $\overrightarrow{JE}$
(3) $\overrightarrow{AF}$	*(8)* $\overrightarrow{LJ}$	*(13)* $\overrightarrow{EK}$
(4) $\overrightarrow{HF}$	*(9)* $\overrightarrow{EH}$	*(14)* $\overrightarrow{ND}$
(5) $\overrightarrow{DH}$	*(10)* $\overrightarrow{EP}$	*(15)* $\overrightarrow{PE}$

Exercício 3. *Sejam A, B, C, D e E, pontos. Prove que:*
(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ *(2)* $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE} \Longrightarrow \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}$

Definição 9. *Se (A, B) é representante do vetor $\vec{v}$, o vetor $\overrightarrow{BA}$ – denotado por $-\vec{v}$ – será chamado de* ***vetor oposto de*** *$\vec{v}$.*

Imediatamente concluímos que $-\vec{0} = \vec{0}$ e que $\vec{v} = -\vec{v}$ se, e somente se, $\vec{v} = \vec{0}$. Ainda $-(-\vec{v}) = \vec{v}$.

Definição 10. *Sejam $\vec{v}$ um vetor e r uma reta. Diremos que $\vec{v}$* ***é paralelo a*** *r se, e somente se, existem $A, B \in r$ tais que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Denotaremos esta situação por $\vec{v} // r$.*

Se π é um plano. Diremos que $\vec{v}$ ***é paralelo a*** *π se, e somente se, existem $A, B \in \pi$ tais que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Denotaremos esta situação por $\vec{v} // \pi$.*

Exercício 4. *À luz da definição de paralelismo entre retas, defina paralelismo entre dois planos e entre uma reta e um plano.*

Proposição 7. *Se r é reta e π é plano, então $\vec{0} // r$ e $\vec{0} // \pi$.*

Demonstração. De fato, se $A \in r$, então $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$. Portanto, $\vec{0} // r$. Analogamente, $\vec{0} // \pi$. □

Exercício 5. *Assinale* ***verdadeiro*** *ou* ***falso*** *às afirmações abaixo. Justifique suas respostas!*
(1) Se $\vec{v}$ é paralelo a qualquer reta, então $\vec{v} = \vec{0}$.
(2) Se $\vec{v}$ é paralelo a qualquer plano, então $\vec{v} = \vec{0}$.
(3) Se $\vec{v}$ é paralelo à reta r e r, por sua vez, for paralela à reta s, então $\vec{v} // s$.
(4) Se $\vec{v}$ é paralelo à reta r e r, por sua vez, for paralela ao plano π, então $\vec{v} // \pi$.
(5) Se $\vec{v}$ é paralelo ao plano π e π, por sua vez, for paralelo à reta s, então $\vec{v} // s$.
(6) Se $\vec{v}$ é paralelo ao plano π e π, por sua vez, for paralelo ao plano σ, então $\vec{v} // \sigma$.

Definição 11. *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores, diremos que $\vec{u}$* ***é paralelo a*** *$\vec{v}$ (ou que $\vec{u}$* ***tem mesma direção que*** *$\vec{v}$) – situação denotada por $\vec{u} // \vec{v}$ – se, e somente se, existe uma reta r tal que $\vec{u} // r$ e $\vec{v} // r$.*

Naturalmente esta relação é reflexiva e simétrica mas não é transitiva pois o vetor nulo é paralelo a todos os vetores.

Exercício 6. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores ambos não nulos. Mostre que $\vec{u} // \vec{v}$ se, e somente se, os representantes de $\vec{u}$ são paralelos aos representantes de $\vec{v}$.*

Exercício 7. *Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores não nulos. Mostre que, se $\vec{u} // \vec{v}$ e $\vec{v} // \vec{w}$, então $\vec{u} // \vec{w}$.*

Definição 12. *Os vetores paralelos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serão ditos* ***de mesmo sentido*** *se, e somente se, um deles é nulo* ***ou*** *ambos são não-nulos e todos os representantes de $\vec{u}$ têm mesmo sentido que aqueles que representam $\vec{v}$.*

Vetores paralelos que não têm mesmo sentido serão ditos ***de sentidos contrários****.*

Portanto o vetor nulo tem mesmo sentido que qualquer vetor. Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, observa-se que $-\vec{v} // \vec{v}$ mas $\vec{v}$ e $-\vec{v}$ têm sentidos contrários.

Observação 2. *Se tomamos somente vetores não nulos e mutualmente paralelos, observamos que "ter mesmo sentido" é uma relação transitiva mas o mesmo* ***não*** *pode ser estabelecido quando incluímos o vetor nulo nesta comparação.*

Ainda, se $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são todos não nulos, $\vec{u}$ tem mesmo sentido que $\vec{v}$ e $\vec{v}$ tem sentido contrário ao de $\vec{w}$, então $\vec{u}$ tem sentido contrário ao de $\vec{w}$.

Exercício 8. *Mostre que, para $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários se, e somente se, $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ têm mesmo sentido.*

Definição 13. *A* ***norma*** *(****módulo****,* ***comprimento*** *ou* ***tamanho****) de um vetor é o comprimento de um (qualquer) dos seus representantes. A norma do vetor $\vec{v}$ será denotada por $\|\vec{v}\|$. Um vetor é* ***unitário*** *quando, e somente quando, tiver norma* 1*.*

Observa-se que $\left\|\vec{0}\right\| = 0$ e que $\|\vec{v}\| = 0$ se, e somente se, $\vec{v} = \vec{0}$. Ainda $\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$, para qualquer vetor $\vec{u}$.

3. Soma de vetor a ponto

Definição 14. *Sejam P um ponto e $\vec{v}$ um vetor. A **soma de P com $\vec{v}$** é o (único) ponto Q tal que $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ – e será denotado por " $P + \vec{v}$ ".*

Escreveremos " $P - \vec{v}$ " para $P + (-\vec{v})$. Imediatamente deduzimos que $P + \vec{0} = P$ e $P - \vec{0} = P$; enquanto $P + \vec{v} = P$ se, e somente se, $\vec{v} = \vec{0}$.

Proposição 8. *Sejam A e B, pontos, e $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores. Logo:*

(1) se $A + \vec{u} = A + \vec{v}$, então $\vec{u} = \vec{v}$,
(2) $(A + \vec{v}) - \vec{v} = A$, e
(3) se $A + \vec{v} = B + \vec{v}$, então $A = B$.

Demonstração. (1) Suponhamos $A + \vec{u} = A + \vec{v} = C$. Logo $\vec{u} = \overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
(2) Seja $D = A + \vec{v}$. Daí $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ e $-\vec{v} = \overrightarrow{DA}$. Portanto $(A + \vec{v}) - \vec{v} = D + (-\vec{v}) = D + \overrightarrow{DA} = A$.
(3) Se $A + \vec{v} = B + \vec{v}$, então, pelo item anterior, $A = (A + \vec{v}) - \vec{v} = (B + \vec{v}) - \vec{v} = B$. □

Proposição 9. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores, ambos não-nulos e de mesmo comprimento. Então $\vec{u} // \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u} = \vec{v}$ ou $\vec{u} = -\vec{v}$.*

Demonstração. Se $\vec{u} = \vec{v}$ ou $\vec{u} = -\vec{v}$, então $\vec{u} // \vec{v}$. Resta-nos provar uma implicação. Suponhamos $\vec{u} // \vec{v}$. Fixemos um ponto A e sejam $B = A + \vec{u}$ e $C = A + \vec{v}$. Logo $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{AC}$ e consequentemente $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$. Dado que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, o ponto A equidista de B e C. Como A, B e C estão alinhados, ou $B = C$ ou A é ponto médio do segmento de reta $\overline{BC}$. Se $B = C$, então $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Se A é ponto médio de $\overline{BC}$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$, ou seja, $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} = -\vec{v}$. □

Exercício 9. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores. Mostre que $\vec{u} = \vec{v}$ ou $\vec{u} = -\vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores paralelos e de mesmo comprimento.*

4. A estrutura algébrica

Definição 15. *Sejam $\vec{v}$ um vetor e α um número real. **O produto de α por $\vec{v}$** – denotado por $\alpha\vec{v}$ – é o vetor determinado da seguinte maneira:*

(1) se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha\vec{v} = \vec{0}$;
(2) se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\alpha > 0$, então $\alpha\vec{v}$ é o vetor de mesma direção e mesmo sentido que $\vec{v}$, tal que $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$;
(3) se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\alpha < 0$, então $\alpha\vec{v}$ é o vetor de mesma direção de $\vec{v}$ e sentido contrário ao de $\vec{v}$, tal que $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$.

Como os números reais são normalmente chamados de **escalares**, chamamos a **ação** que acabamos de definir também de **multiplicação (ou produto) por escalar** e $\alpha\vec{v}$ de **múltiplo escalar**. Deduzimos que $\alpha\vec{v} // \vec{v}$ e que $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$ em qualquer situação.

A construção de $\alpha\vec{v}$, para $\alpha \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, é justificada pelo seguinte:
(1) Sejam $x = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$ e A, B, pontos, tais que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.
(2) Seja $C \in \overleftrightarrow{AB}$, tal que a distância de A até C é x e C está no mesmo lado que B com relação ao ponto A.
Logo $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CA}$ têm mesma direção de $\vec{v}$ e comprimento x. Ainda $\overrightarrow{AC}$ tem mesmo sentido que $\vec{v}$, enquanto $\overrightarrow{CA}$ tem sentido contrário ao de $\vec{v}$. A construção estabeleceu **um** vetor com as propriedades requeridas. Seja $\vec{u}$ tal que $\vec{u} // \vec{v}$ e $\|\vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$. Naturalmente $\|\vec{u}\| = x$. Pela proposição 9, $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ ou $\vec{u} = -\overrightarrow{AC}$. Se $\vec{u}$ tiver mesmo sentido que $\vec{v}$, então $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$; caso contrário, $\vec{u} = \overrightarrow{CA}$.

Podemos concluir rapidamente que, para qualquer vetor $\vec{v}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:
(1) $1\vec{v} = \vec{v}$ e $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$.
(2) $\alpha\vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$,

Proposição 10. *Para $\vec{v}$, vetor, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$.*

Demonstração. Se $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\alpha\beta = 0$, vale que $\alpha(\beta\vec{v}) = \vec{0} = (\alpha\beta)\vec{v}$. Suponhamos $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\alpha\beta \neq 0$. Logo $\vec{v}$, $\alpha(\beta\vec{v})$ e $(\alpha\beta)\vec{v}$ são paralelos entre si e todos não nulos. Como $\alpha(\beta\vec{v})$ e $(\alpha\beta)\vec{v}$ têm mesmo comprimento $|\alpha\beta| \cdot \|\vec{v}\|$, deduzimos que $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$ ou $\alpha(\beta\vec{v}) = -\big((\alpha\beta)\vec{v}\big)$, pela proposição 9. Estudemos os casos:

(1) Caso $\alpha < 0 < \beta$, $(\alpha\beta)\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários. Como $\beta\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido, $\alpha(\beta\vec{v})$ e $\beta\vec{v}$ têm sentidos contrários, segue que $\alpha(\beta\vec{v})$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários. Portanto $(\alpha\beta)\vec{v}$ e $\alpha(\beta\vec{v})$ têm mesmo sentido.
(2) O caso $\beta < 0 < \alpha$ é análogo ao anterior.
(3) Se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, então $\vec{v}$, $\beta\vec{v}$, $\alpha(\beta v)$ e $(\alpha\beta)\vec{v}$ têm mesmo sentido.
(4) Suponhamos $\alpha < 0$ e $\beta < 0$. Daí $\vec{v}$ e $(\alpha\beta)\vec{v}$ têm mesmo sentido. Sabe-se que $\alpha(\beta\vec{v})$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido, pois $\beta\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários e $\alpha(\beta\vec{v})$ e $\beta\vec{v}$ têm sentidos contrários.

Em qualquer dos casos, $\alpha(\beta\vec{v})$ e $(\alpha\beta)\vec{v}$ têm mesmo sentido e portanto vale a igualdade. □

Definição 16. *Dados o vetor $\vec{v}$ e o real $\alpha \neq 0$, definimos o vetor $\frac{\vec{v}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\vec{v}$. Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, daremos o nome de* ***versor de*** *$\vec{v}$ para o vetor $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.*

Exercício 10. *Sejam $\vec{u}$, vetor, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mostre que:*
(1) $-(\alpha\vec{v}) = (-\alpha)\vec{v} = \alpha(-\vec{v})$.
(2) Se $\beta \neq 0$, então $\frac{\alpha\vec{v}}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}\vec{v}$ e $\frac{\beta\vec{v}}{\beta} = \vec{v}$.

Proposição 11. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores e $\alpha \in \mathbb{R}$, não nulo. Então $\alpha\vec{u} = \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\alpha}$.*

Demonstração. Suponhamos $\alpha\vec{u} = \vec{v}$. Daí

$$\vec{u} = 1\vec{u} = \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha\right)\vec{u} = \frac{1}{\alpha}(\alpha\vec{u}) = \frac{1}{\alpha}\vec{v} = \frac{\vec{v}}{\alpha} \ .$$

Reciprocamente, se $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\alpha}$, então

$$\alpha\vec{u} = \alpha\left(\frac{\vec{v}}{\alpha}\right) = \left(\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}\right)\vec{v} = 1\vec{v} = \vec{v} \ .$$

□

Exercício 11. *Sejam $\vec{u}, \vec{v}$, vetores, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mostre que:*
(1) se $\alpha\vec{u} = \alpha\vec{v}$ e $\alpha \neq 0$, então $\vec{u} = \vec{v}$, e
(2) se $\alpha\vec{u} = \alpha\vec{v}$, então $\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{v}$.

Proposição 12. *Sejam $\vec{v}$ um vetor não nulo e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se $\alpha\vec{v} = \beta\vec{v}$, então $\alpha = \beta$.*

Demonstração. Suponhamos que $\alpha\vec{v} = \beta\vec{v}$. Naturalmente $|\alpha| \cdot \|\vec{v}\| = |\beta| \cdot \|\vec{v}\|$ e, dado que $\|\vec{v}\| \neq 0$, conclui-se que $|\alpha| = |\beta|$. Estudemos os casos:

(1) Se $\alpha = 0$, então $\beta = 0$. Daí $\alpha = \beta$.
(2) Caso $\alpha > 0$, então $\beta \neq 0$. Dado que $\alpha\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido, então $\beta\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido. Portanto $\beta > 0$ e $\beta = |\beta| = |\alpha| = \alpha$.
(3) Caso $\alpha < 0$, então $\beta \neq 0$. Dado que $\alpha\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários, então $\beta\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários. Portanto $\beta < 0$, $-\beta = |\beta| = |\alpha| = -\alpha$ e $\alpha = \beta$. □

Corolário 3. *Sejam $\vec{v}$ um vetor e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se $\alpha\vec{v} = \beta\vec{v}$, então $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\alpha = \beta$.* □

Proposição 13. *Sejam $\vec{v}$ um vetor não-nulo e $\vec{u}$ um vetor qualquer. Então $\vec{u}//\vec{v}$ se, e somente se, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.*

Demonstração. Se $\vec{u}$ é múltiplo escalar de $\vec{v}$, certamente $\vec{u}//\vec{v}$. Agora suponhamos que $\vec{u}//\vec{v}$. Se $\vec{u} = \vec{0}$, então $\vec{u} = 0\vec{v}$. Suponhamos que $\vec{u} \neq \vec{0}$. Como $\vec{0} \neq \vec{u}//\vec{v} \neq \vec{0}$, então que $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}//\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ e têm mesmo comprimento 1. Pela proposição 9, $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ ou $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = -\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Sendo assim,

$$\vec{u} = \left(\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}\right)\vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{u} = -\left(\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}\right)\vec{v}.$$

Em ambos os casos, $\vec{u}$ é múltiplo escalar de $\vec{v}$. □

Corolário 4. *Sejam $\vec{v}$ e $\vec{u}$ vetores. Então $\vec{u}//\vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u}$ é múltiplo escalar de $\vec{v}$ ou $\vec{v}$ é múltiplo escalar de $\vec{u}$.* □

Corolário 5. *Sejam A, B e X pontos tais que $A \neq B$. São equivalentes:*

(1) $X \in \overleftrightarrow{AB}$,
(2) $\overrightarrow{AX}//\overrightarrow{AB}$ e
(3) existe $\lambda \in \mathbb{R}$, único, tal que $X = A + \lambda\overrightarrow{AB}$.

Demonstração. Suponhamos $X \in \overleftrightarrow{AB}$. Se $X = A$, logo $\overrightarrow{AX} = \vec{0}$, que é paralelo a $\overrightarrow{AB}$. Se $X \neq A$, então $\overleftrightarrow{AX} = \overleftrightarrow{AB}$ e também $\overrightarrow{AX}//\overrightarrow{AB}$.

Se $\overrightarrow{AX}//\overrightarrow{AB}$, pela proposição anterior, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Portanto $X = A + \overrightarrow{AX} = A + \lambda\overrightarrow{AB}$. Se $\mu \in \mathbb{R}$ e $X = A + \mu\overrightarrow{AB}$, então $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB} = \mu\overrightarrow{AB}$. Pela proposição 12, $\lambda = \mu$.

Suponhamos que $X = A + \lambda\overrightarrow{AB}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Daí $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Se $X = A$, então $X \in \overleftrightarrow{AB}$. Caso $X \neq A$, então o segmento orientado (A, X) é paralelo ao segmento orientado (A, B) e daí $\overleftrightarrow{AX}//\overleftrightarrow{AB}$. Dado que A é ponto comum às duas retas, $\overleftrightarrow{AX} = \overleftrightarrow{AB}$ e $X \in \overleftrightarrow{AB}$. □

Obervamos que, nas condições do último corolário:

(1) $X = A$ se, e somente se, $\lambda = 0$,
(2) $X = B$ se, e somente se, $\lambda = 1$,
(3) X está entre A e B se, e somente se, $0 < \lambda < 1$,
(4) A está entre X e B se, e somente se, $\lambda < 0$, e
(5) B está entre X e A se, e somente se, $\lambda > 1$.

Exercício 12. *Sejam $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ pontos distintos de uma reta que estejam nesta ordem igualmente espaçados. Sejam $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{t} = \overrightarrow{GD}$, $\vec{u} = \overrightarrow{AI}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{CH}$. Determine o que se pede:*

(1) A em função de B e $\vec{s}$
(2) C em função de E e $\vec{s}$
(3) H em função de C e $\vec{s}$
(4) A em função de I e $\vec{t}$
(5) B em função de C e $\vec{t}$
(6) $\overrightarrow{AJ}$ em função de $\vec{t}$
(7) $\overrightarrow{DA}$ em função de $\vec{u}$
(8) G em função de H e $\vec{u}$
(9) C em função de A e $\vec{u}$
(10) $\overrightarrow{DF}$ em função de $\vec{v}$
(11) D em função de J e $2\vec{v}$
(12) $\vec{v}$ em função de $\vec{u}$

Definição 17. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores. Fixado um ponto A, sejam $B = A + \vec{u}$ e $C = B + \vec{v}$. Definimos o vetor $\overrightarrow{AC}$ como sendo " $\vec{u} + \vec{v}$ ", **a soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$**.*

Se fixamos um ponto E e tomamos $F = E + \vec{u}$ e $G = F + \vec{v}$, então $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$. Portanto, o cálculo da soma de vetores **independe** da escolha do primeiro ponto como "ponto de partida". Sendo assim, se X, Y e Z são pontos, então que $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$.

Proposição 14. *Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$:*

(1) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$,
(2) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$,
(3) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, e
(4) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

Demonstração. Fixemos A e seja $B = A + \vec{u}$. Daí $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$,

$$\vec{u} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u} \qquad \text{e} \qquad \vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}\ .$$

Sejam $C = B + \vec{v}$ e $D = A + \vec{v}$. Logo $\vec{v} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ e, consequentemente, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Portanto,

$$\vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}\ .$$

Seja $E = C + \vec{w}$. Daí $\vec{w} = \overrightarrow{CE}$ e

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}) = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})\ .$$

□

Exercício 13. *Prove que, se A é ponto, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores, então $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$.*

Exercício 14. *Sejam A e B pontos, e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores. Prove que, se $A + \vec{u} = B + \vec{v}$, então $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \vec{v}$.*

Exercício 15. *Determine relação entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo que, para um dado ponto A, $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A$.*

Lema 15. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores paralelos e de mesmo sentido. Então $\vec{u}+\vec{v}$ têm mesmo sentido de $\vec{u}$ (e de $\vec{v}$) e $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.*

Demonstração. Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, vale a tese do lema. Suponhamos que $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$.

Fixemos um ponto A e sejam $B = A + \vec{u}$ e $C = B + \vec{v}$. Dado que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesma direção e não são nulos, esses pontos estão alinhados e B está entre A e C. Então $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ tem mesma direção sentido que $\vec{u}$ e que $\vec{v}$. Além do mais a distância de A até C é a soma da distância de A até B com a distância de B até C. Ou seja,

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \ .$$

□

Lema 16. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores paralelos e de sentidos contrários. Então $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \big|\, \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \,\big|$. Ainda, $\vec{u}+\vec{v}$ tem mesmo sentido que aquele de maior norma entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.*

Demonstração. Dado que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm sentido contrários, $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$. Se $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, então $\vec{u} = -\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{v} = \vec{0}$ e segue a tese do lema. Sem perda de generalidade, suponhamos $\|\vec{u}\| > \|\vec{v}\|$.

Fixemos um ponto A e sejam $B = A + \vec{u}$ e $C = B + \vec{v}$. Devidas às condições, esses pontos estão alinhados e C está entre A e B. Então $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ tem mesma direção sentido que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Além do mais a distância de A até B é a soma da distância de A até C com a distância de C até B. Ou seja,

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\| - \|\overrightarrow{BC}\| = \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \ .$$

□

Teorema 17. *Sejam $\vec{u}$, vetor, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.*

Demonstração. Se $\alpha\beta = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, o resultado vale. Suponhamos $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\alpha\beta \neq 0$. Lembremos que $\|(\alpha+\beta)\vec{u}\| = |\alpha+\beta|\,\|\vec{u}\|$. Estudemos o resultados para os casos $\alpha\beta > 0$ e $\alpha\beta < 0$.

Se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, então $\vec{u}$, $\alpha\vec{u}$ e $\beta\vec{u}$ têm todos mesma direção, mesmo sentido e são todos não nulos. Consequentemente, $\alpha\vec{u}$ e $\beta\vec{u}$ têm mesmo sentido. Pelo lema 15,

$$\|\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}\| = \|\alpha\vec{u}\| + \|\beta\vec{u}\| = \alpha\,\|\vec{u}\| + \beta\,\|\vec{u}\| = (\alpha+\beta)\,\|\vec{u}\| = \|(\alpha+\beta)\vec{u}\| \ ,$$

pois $\alpha+\beta > 0$. Neste caso, $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$, pois $(\alpha+\beta)\vec{u}$ e $\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$ têm mesma direção e mesmo sentido.

Se $\alpha < 0$ e $\beta < 0$, então $\alpha+\beta < 0$ e $\alpha\vec{u}, \beta\vec{u}$ e $(\alpha+\beta)\vec{u}$ têm sentidos contrários ao sentido de $\vec{u}$. Dado que são todos não nulos, $\alpha\vec{u}$ e $\beta\vec{u}$ têm mesmo sentido. Pelo lema 15, $\|\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}\| = \|\alpha\vec{u}\| + \|\beta\vec{u}\|$. Sendo assim,

$$\|\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}\| = |\alpha|\,\|\vec{u}\| + |\beta|\,\|\vec{u}\| = \big(-\alpha-\beta\big)\,\|\vec{u}\| = |\alpha+\beta|\,\|\vec{u}\| = \|(\alpha+\beta)\vec{u}\| \ .$$

Visto que $(\alpha+\beta)\vec{u}$ e $\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$ têm mesma direção e mesmo sentido, também neste caso, $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$.

Suponhamos $\alpha\beta < 0$. Neste caso, $\alpha\vec{u}$ e $\beta\vec{u}$ têm sentidos contrários e $|\alpha+\beta| = \big||\alpha| - |\beta|\big|$. Então

$$\|\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}\| = \big|\, \|\alpha\vec{u}\| - \|\beta\vec{u}\| \,\big| = \Big||\alpha|\,\|\vec{u}\| - |\beta|\,\|\vec{u}\|\Big| = \big||\alpha| - |\beta|\big|\,\|\vec{u}\| = |\alpha+\beta|\,\|\vec{u}\| = \|(\alpha+\beta)\vec{u}\| \ ,$$

pelo lema 16. Sem perda de generalidade, tomemos $\alpha > 0 > \beta$ e estudemos os casos possíveis:
(1) Se $\|\alpha\vec{u}\| > \|\beta\vec{u}\|$, então $\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}, \alpha\vec{u}$ e $\vec{u}$ têm mesmo sentido, pelo lema 16. Dado que $\alpha\,\|\vec{u}\| = \|\alpha\vec{u}\| > \|\beta\vec{u}\| = -\beta\,\|\vec{u}\|$, deduzimos que $\alpha+\beta > 0$ e consequentemente $(\alpha+\beta)\vec{u}$ tem mesmo sentido que $\vec{u}$. Sendo assim, $\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$ e $(\alpha+\beta)\vec{u}$ têm mesmo sentido e $(\alpha+\beta)\vec{u} = \vec{0} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$.
(2) Se $\|\alpha\vec{u}\| < \|\beta\vec{u}\|$, então $\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$ tem mesmo sentido que $\beta\vec{u}$, pelo lema 16. Dado que $\alpha\,\|\vec{u}\| = \|\alpha\vec{u}\| < \|\beta\vec{u}\| = -\beta\,\|\vec{u}\|$, então $\alpha+\beta < 0$. Logo $(\alpha+\beta)\vec{u}$ e $\vec{u}$ têm sentidos contrários. Portanto $(\alpha+\beta)\vec{u}$ e βv têm mesmo sentido. Consequentemente, $\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$ e $(\alpha+\beta)\vec{u}$ têm mesmo sentido e também $(\alpha+\beta)\vec{u} = \vec{0} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$.
(3) Se $\|\alpha\vec{u}\| = \|\beta\vec{u}\|$, então $\alpha\,\|\vec{u}\| = \|\alpha\vec{u}\| = \|\beta\vec{u}\| = -\beta\,\|\vec{u}\|$ e $\alpha+\beta = 0$. Logo $\alpha\vec{u} = -\beta\vec{u}$ e $(\alpha+\beta)\vec{u} = \vec{0} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$.

Estudadas todas as possibilidades, concluímos que $(\alpha+\beta)\vec{u} = \vec{0} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$. □

Exercício 16. *Seja $\vec{w}$ um vetor não nulo e sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores paralelos a $\vec{w}$. Mostre que $\vec{u}+\vec{v}$ é paralelo a $\vec{w}$.*

Definição 18. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores. Definimos a* ***diferença entre*** *$\vec{u}$ e $\vec{v}$ por $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.*

Exercício 17. *Mostre que, para os vetores $\vec{x}, \vec{u}$ e $\vec{v}$, então $\vec{x} + \vec{v} = \vec{u}$ se, e somente se, $\vec{x} = \vec{u} - \vec{v}$.*

Exercício 18. *Mostre que, para os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, $-(\vec{u} + \vec{v}) = -\vec{u} - \vec{v}$.*

Proposição 18 (Lei do Cancelamento)**.** *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores. Se $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, então $\vec{v} = \vec{w}$.*

Demonstração. Se $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, então

$$\vec{v} = \vec{0} + \vec{v} = (-\vec{u} + \vec{u}) + \vec{v} = -\vec{u} + (\vec{u} + \vec{v}) = -\vec{u} + (\vec{u} + \vec{w}) = (-\vec{u} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{0} + \vec{w} = \vec{w}.$$

□

E finalmente relacionamos a soma de vetores com a multiplicação por escalar.

Teorema 19. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores, e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$.*

Demonstração. Se $\vec{u} /\!/ \vec{v}$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Daí, pelo teorema 17,

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha(\lambda\vec{v} + \vec{v}) = \alpha\big((\lambda + 1)\vec{v}\big) = \big(\alpha(\lambda + 1)\big)\vec{v} = (\alpha\lambda + \alpha)\vec{v} = \alpha(\lambda\vec{v}) + \alpha\vec{v} = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \ .$$

Se $\alpha = 0$, também validamos a tese do teorema. Seguimos, então, supondo que $\alpha \neq 0$ e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos. Consequentemente, $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$.

Tomemos o caso $\alpha > 0$ e fixemos um ponto A. Sejam $B = A + \vec{u}$ e $C = B + \vec{v}$. Logo A, B e C formam um triângulo. Sejam $D = A + \alpha\overrightarrow{AB}$ e $E = A + \alpha\overrightarrow{AC}$. Como $\alpha > 0$, então D está na reta $\overleftrightarrow{AB}$ e do mesmo lado que B com relação ao ponto A. Pelo mesmo argumento, E está na reta $\overleftrightarrow{AC}$ e do mesmo lado que C com relação ao ponto A. Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ são semelhantes por causa dos ângulos coincidentes $C\hat{A}B$ e $E\hat{A}D$ e posto que o lado $\overline{AC}$ está para o lado $\overline{AE}$ na mesma razão (a saber α) que o lado $\overline{AB}$ está para o lado $\overline{AD}$. Sendo assim, o segmento orientado (B, C) é paralelo e tem mesmo sentido que o segmento orientado (D, E). Devido à semelhança entre os triângulos citados, $\overrightarrow{DE} = \alpha\overrightarrow{BC}$. Portanto,

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \alpha\overrightarrow{BC} = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \ .$$

Agora suponhamos $\alpha < 0$. Pelo visto no parágrafo anterior,

$$(-\alpha)(\vec{u} + \vec{v}) = (-\alpha)\vec{u} + (-\alpha)\vec{v} \ .$$

Uma vez que $(-\alpha)\vec{u} + (-\alpha)\vec{v} = -\alpha\vec{u} - \alpha\vec{v} = -(\alpha\vec{u} + \alpha\vec{v})$, pelo exercício 18,

$$\alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} = -\big((-\alpha)(\vec{u} + \vec{v})\big) = \alpha(\vec{u} + \vec{v}) \ .$$

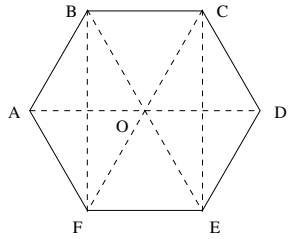
□

Exercício 19. *Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ vetores e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Prove que:*

(1) $\lambda(\vec{u} - \vec{v}) = \lambda\vec{u} - \lambda\vec{v}$. *(2)* $(\lambda - \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} - \mu\vec{u}$.

Exercício 20. *Para $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores e $b, c \in \mathbb{R}$ tais que $b \neq 0$ e $c \neq 0$, prove que:*

(1) $\frac{\vec{u}+\vec{v}}{b} = \frac{\vec{u}}{b} + \frac{\vec{v}}{b}$ *(2)* $\frac{\vec{u}-\vec{v}}{b} = \frac{\vec{u}}{b} - \frac{\vec{v}}{b}$ *(3)* $\frac{\vec{v}}{b} + \frac{\vec{u}}{c} = \frac{c\vec{v}+b\vec{u}}{bc}$ *(4)* $\frac{\vec{v}}{b} - \frac{\vec{u}}{c} = \frac{c\vec{v}-b\vec{u}}{bc}$



Para as próximas duas questões, $ABCDEF$ é um hexágono regular de centro O (como o da figura ao lado).

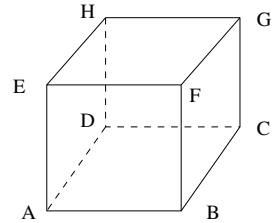
Exercício 21. *Determine o que se pede:*

(1) $A + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DO}$
(2) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$
(3) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{CD}$
(4) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DO}$
(5) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$

Exercício 22. *Prove que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}$.*

Exercício 23. *Para o cubo da figura ao lado, determine o que se pede:*

(1) $A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
(2) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DH} - \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}$
(3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{BF}$
(4) $\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BH}$



Exercício 24. *Num triângulo $\triangle ABC$, sejam M, N, P os pontos médios dos lados AB, BC e AC, respectivamente. Mostre que $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.*

Exercício 25. *Sejam A, B e C três pontos quaisquer, com $A \neq B$. Prove que:*

$$X \text{ é um ponto do segmento } \overline{AB} \iff \overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}, \text{ com } \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0 \text{ e } \alpha + \beta = 1.$$

Exercício 26. *Sejam A e B pontos distintos, e tome o ponto C na reta $\overleftrightarrow{AB}$ de tal forma que $\frac{\overrightarrow{AC}}{r} = \frac{\overrightarrow{CB}}{s}$, para $r, s \in \mathbb{R}$, não-nulos. Escreva $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CB}$ em função de $\overrightarrow{AB}$, r e s.*

Exercício 27. *Um triângulo tem vértices A, B e C. Prove que X é um **ponto interior ao** ΔABC se, e somente se, existem reais α e β, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, tais que $\alpha + \beta < 1$ e $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$. (***Lembrete:*** *Um ponto é dito interior a uma triângulo se, e somente se, é interior a uma segmento que tem uma extremidade em um vértice e a outra extremidade interior ao lado oposto.)*

Exercício 28. *Prove que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.*

Exercício 29. *Prove que o segmento de reta, determinado pelos pontos médios de dois lados de um triângulo, é paralelo ao terceiro lado do triângulo e tem metade da medida deste.*

Exercício 30. *Um trapézio é um quadrilátero que tem dois, **e somente dois**, lados paralelos. Os lados paralelos de um trapézio são chamados de bases. Prove que o segmento de reta de extremidades nos pontos médios dos lados não-paralelos de uma trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a média (aritmética) das medidas das bases.*